Exercice 1

1) posons p_i la probabilité d'obtenir le chiffre i , on a
$p_1 = p_3$, $p_5 = p_6 = 2p_1$ et $2p_1 = 3p_2$

$$\sum_1^6 p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$\Leftrightarrow$ $p_1 + p_2 + p_1 + p_2 + 2p_1 + 2p_1 = 1$

$\Leftrightarrow$ $6\,p_1 + 2\,p_2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $3x2\,p_1 + 2\,p_2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $3x3p_2 + 2p_2 = 11p_2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $p_2 = \frac{1}{11}$

Or $p_1 = \frac{3}{2}\,p_2 \Longrightarrow p_1 = \frac{3}{22}$

Conclusion : $\boxed{p_1 = p_3 = \frac{3}{22}\ ,\ p_2 = p_4 = \frac{1}{11}\ ,\ p_5 = p_6 = \frac{3}{11}}$

2) $A = \{2,4,6\}$; $p(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{5}{11}$

$B = \{5,6\}$; $p(A) = p_5 + p_6 = \frac{6}{11}$

Exercice 2

3R, 5V, 7J

1) $\text{card}(\Omega) = 15^2 = 225$

2) $p(A) \overset{(R,R)}{=} \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3^2}{225} = \frac{9}{225}$

$p(B) \overset{(J,J)}{=} \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{7^2}{225} = \frac{49}{225}$

$p(C) \overset{(RR)ou(VV)ou(JJ)}{=} \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{3^2+5^2+7^2}{225} = \frac{83}{225}$

On a D est l'événement contraire de C d'où :

$$p(D) = p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{83}{225} = \frac{142}{225}$$

Exercice 3

B_1-B_4-N_2-N_3-N_5-N_7

1) card. $(\Omega) = C_6^2 = 15$

$p(A) \overset{n°:1ou3ou5ou7}{=} \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$p(B) \overset{\{B,B\}ou\{N,N\}}{=} \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_2^2 + C_4^2}{15} = \frac{1+6}{15} = \frac{7}{15}$

" $C = \{N_1, N_5, N_7\} = A \cap B$"

$p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

L'événement D est la réunion des événements A et B

$p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$= p(A) + p(B) - p(C)$
$= \frac{2}{5} + \frac{7}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ donc $\boxed{p(D) = \frac{2}{5}}$

2) card. $(\Omega) = 6^2 = 36$

$p(E) \overset{(B,N)ou(N,B)}{=} \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{(2^1 x 4^1)x2}{36} = \frac{4}{9}$

$\overline{F}$ <<N'obtenir aucune boule noire>> donc $\overline{F}$ est réalisée lorsque on tire deux boules blanches parmi quatre

$p(\overline{F}) = \frac{2^2}{36} = \frac{1}{9} \Longrightarrow p(F) = 1 - p(\overline{F}) = \frac{8}{9}$

Exercice 4

$\boxed{4B, 2R}$

1) a) E_k << seule la k^{eme} boule tirée est blanche >>

$p(E_1) \overset{(BRR)}{=} \frac{4}{6} x \frac{2}{5} x \frac{2}{5} = \frac{8}{75}$

b) $p(E_2) \overset{(RBR)}{=} \frac{2}{6} x \frac{4}{6} x \frac{2}{5} = \frac{4}{45}$

$p(E_3) \overset{(RRB)}{=} \frac{2}{6} x \frac{2}{6} x \frac{4}{6} = \frac{2}{27}$

c) $p(E) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{72+60+50}{675} = \frac{182}{675}$

d) $p(E_1 \mid E) = \frac{p(E \cap E_1)}{p(E)} = \frac{p(E_1)}{p(E)} = \frac{\frac{8}{75}}{\frac{182}{675}} = \frac{36}{91}$

2) a) $n \geq 2$, soit A_n l'événement << obtenir au moins une boule blanche parmi les n boules tirées >>

$\overline{A_n}$ << N'obtenir aucune boule blanche >>

Donc toutes les boules tirées sont rouges

$p(\overline{A_n}) = (\frac{2}{6})^n = \frac{1}{3^n}$

D'où $p(A_n) = 1 - p(\overline{A_n}) = \boxed{1 - \frac{1}{3^n} = p_n}$

b) $p_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3^n} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow (\frac{1}{3})^n \leq 0{,}01$

ln:log.népérien

$\ln((\frac{1}{3})^n \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \ln\frac{1}{3} \leq \ln(0{,}01)$

$(\ln\frac{1}{3} \leq 0)$ donc $n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(\frac{1}{3})} \approx 4{,}19$

Conclusion : $\boxed{n \geq 5}$

Exercice 5

$\boxed{3B,2N}$ $\boxed{1B,4N}$

U_1 U_i $2 \leq i \leq n$

1) E_1 : tirer une blanche parmi les trois de l'urne U_1

$\overline{E_1}$: tirer une noire parmi les deux de l'urne U_1

$p(E_1) = \frac{3}{5}$

- On prend une blanche de U_1 que l'on mettre dans U_2 puis on tire une blanche de deux dans l'urne U_2 qui contient dans ce cas six boules d'où :

$p(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- On prend une noire de U_1 que l'on mettre dans U_2 puis on tire une blanche de l'urne U_2 qui contient dans ce cas une blanche et cinq noires d'où :

$p(E_2 \mid \overline{E_1}) = \frac{1}{6}$

On a $p(E_2) = p(E_2 \cap E_1) + p(E_2 \cap \overline{E_1})$

$= p(E_1).p(E_2 \mid E_1) + p(\overline{E_1})\, p.(E_2 \mid \overline{E_1})$

$= \frac{3}{5} x \frac{1}{3} + \frac{2}{5} x \frac{1}{6} = \frac{4}{15}$

2) $p_{k+1} = p(E_{k+1})$

a) $p(E_{k+1}) = p(E_{k+1} \cap E_k) + p(E_{k+1} \cap \overline{E_k})$

$= p(E_k).p(E_{k+1} \mid E_k) + p(\overline{E_k})\, p(E_{k+1} \mid \overline{E_k})$

$= p_k x \frac{2}{6} + (1 - \overline{p_k}) x \frac{1}{6}$

$p_{k+1} = p_k(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}) + \frac{1}{6}$

$p_{k+1} = \frac{1}{6} p_k + \frac{1}{6}$

b) On a : $V_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{6} p_n - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}(p_n - \frac{1}{5})$

D'où $V_{n+1} = \frac{1}{6} V_n$ ce qui prouve que la suite V est géométrique de raison $\frac{1}{6}$

c) On sait que : $V_n = V_1 x (\frac{1}{6})^{n-1}$

Or on a : $V_1 = p_1 - \frac{1}{5} = p(E_1) - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \quad V_n = \frac{2}{5} x (\frac{1}{6})^{n-1}$

Par suite : $p_n = V_n + \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{p_n = \frac{2}{5} x (\frac{1}{6})^{n-1} + \frac{1}{5}}$

$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{2}{5} x (\frac{1}{6})^{n-1} + \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{5}$

$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{6})^{n-1} = 0$

$-1 < \frac{1}{6} < 1$

Exercice 6

$\boxed{R_1R_1R_0, J_1J_0J_{-1}, V_2V_{-1}}$

1) $p(A) \overset{\{R_1,R_1,J_1\}}{=} \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

$p(B) \overset{\{3R\} ou \{3J\}}{=} \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{28}$

*pour que l'événement C est réalisée il suffit de tirer le jeton jaune numéroté 0 et les deux jetons rouges numérotés 1 ou bien le jeton rouge numéroté 0 et un jeton parmi les deux jetons rouges numérotés 1 et un jeton parmi les jetons jaunes numérotés 1 et – 1 et les deux jetons verts donc :

$$p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{C_1^1 x C_2^2 + C_1^1 x C_2^1 x C_4^1}{C_8^3} = \frac{1+8}{56} = \frac{9}{56}$$

$$p(D) = \frac{card(D)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^2 x C_5^1 + C_4^2 x C_2^1}{C_8^3} = \frac{27}{56}$$

2)

- $p(S) \overset{\{0;1;-1\} ou \{2;-1;-1\}}{=} = \frac{C_3^1 x C_2^1 x C_2^1 + C_1^1 x C_2^2}{C_8^3} = \frac{13}{56}$

$\overline{N}$: tirer trois jetons portants un numéro différent de 0

- $p(\overline{N}) = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \Rightarrow p(N) = 1 - p(\overline{N})$

$\Rightarrow p(N) = \frac{9}{14}$

3) l'événement $N \cap S$: << obtenir un produit nul et une somme nulle >> donc tirer un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté – 1

$$\Rightarrow p(N \cap S) = \frac{C_3^1 x C_2^1 x C_2^1}{C_8^3} = \frac{12}{56}$$

Donc : $p(N \mid S) = \frac{p(N \cap S)}{p(S)} = \frac{\frac{12}{\not 56}}{\frac{13}{\not 56}} = \frac{12}{13}$

Exercice 7

$\boxed{0-0-0-0-1-1-2}$

1) $p(R) \overset{\{0,0,0\}}{=} = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$

L'événement A | R : << obtenir trois jetons numérotés 0 au premier tirage puis tirer le jeton numéroté 0 parmi les quatre qui reste au second tirage >>

$\Rightarrow p(A \mid R) = \frac{1}{4}$

$p(A \cap R) = p(R).\ p(A \mid R) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{35} = \frac{1}{35}$

$\boxed{p(A) = p(A \cap R) = \frac{1}{35}}$

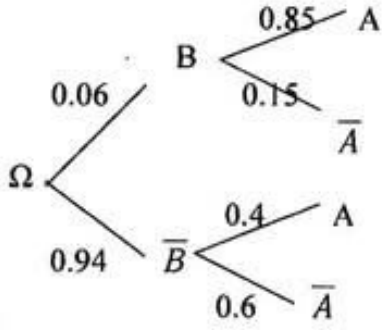
$\square^{\{0;0;1\}}\square \quad \square^{\{0;0;0\} \cap \{1\}}\square$

2) a) $p(B) = \frac{C_4^2 . C_2^1}{C_7^3} + \frac{C_4^3}{C_7^3} . \frac{2}{4} = \frac{12}{35} + \frac{2}{35} = \frac{14}{35}$

b) $p(H) = p(R \mid B) = \frac{p(R \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{\not 35}}{\frac{14}{\not 35}} = \frac{1}{7}$

Exercice 8

1) On pourra utiliser un diagramme en arbre :



On a donc :

$p(\overline{A} \mid B) = 1 - p(A \mid B) = 1 - 0,85 = 0,15$

$$p(\overline{B} \mid A) = \frac{p(\overline{B} \cap A)}{p(A)} = \frac{0,4x\,0,94}{p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})}$$

$$p(\overline{B} \mid A) = \frac{0,376}{p(B)p(A \mid B) + p(\overline{B})p(A \mid \overline{B})}$$

$$= \frac{0,376}{0,06x\,0,85 + 0,94x\,0,4} = \frac{0,376}{0,427} = 0,885$$

$$\Rightarrow \quad p(\overline{B} \mid A) = 0,885$$

2) $p(A \cap B) = p(B).\ p(A \mid B)$
$=0,06 \times 0,85 = 0,051$

$p(A) \times p(B) = 0,427 \times 0,06 = 0,025$

Conclusion : $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$, d'où A et B ne sont pas indépendants

Exercice 9

$$p(A) \overset{(2,4,6)ou(1,3,5)}{=} \frac{3^2 + 3^2}{6^2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) \overset{(2,4,6)ou(1,3,5)}{=} \frac{(1^1 x\,6^1)x\,2}{6^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$p(A \cap B) = \frac{(1^1 x\,3^1)x\,2}{6^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Conclusion : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, d'où A et B sont deux événements indépendants

Exercice 10

D_1 " la pièce présente le défaut D_1 "
D_2 " la pièce présente le défaut D_2 "

1) A l'événement <<la pièce présente les 2 défauts>>

$p(A) = p(D_1 \cap D_2) = p(D_1)\ p(D_2 \mid D_1)$
$= 0.08.x0.15 = 0.012$

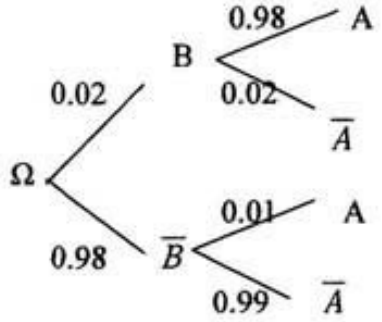
2)

$$p(D_2 \cup D_1) = p(D_1) + p(D_2) - p(D_2 \cap D_1) = 1$$
$$\Leftrightarrow p(D_2) = 1 + p(D_2 \cap D_1) - p(D_1)$$
$$= 1 + 0.012 - 0.08 = 0.932$$

3) $p(D_1 \mid D_2) = \frac{p(D_1 \cap D_2)}{p(D_2)} = \frac{0,012}{0,932} = 0.013$

Exercice 11

On considère l'arbre pondéré ci contre où M désigne L'événement "personne malade" et T l'événement " Le test de dépistage est positif"



a) $p(M \cap T) = p(M).\ p(T \mid M)$
$= 0.98x.0.02 = 1,96\ \%$

b) $p(\overline{M} \cap \overline{T}) = p(\overline{M}).\ p(\overline{T} \mid \overline{M})$
$= 0.98x.0.99 = 97,02\%$

c) $p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T)$
$= \frac{196}{1000} + \frac{1}{100} x \frac{98}{100} = 2,94\ \%$

d) $p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 70,60\ \%$

e) $p(\overline{M} \mid T) = \frac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0098}{0,0294} \sqcup 33\%$

f) $p(M \mid \overline{T}) = \frac{p(\overline{T} \cap M)}{p(\overline{T})} = \frac{0,0004}{0,706} \sqcup 0,56\%$

Exercice 12

On considère les événements :
M " Dérèglement mécanique "
E " Dérèglement électronique "

On a : p (M) = 0,007 ; p (E) = 0,003
p (M | E) = 0,5

1) $p(M \cap E) = p(E).p(M \mid E)$
$= 0{,}003 \times 0{,}5 = 0{,}0015$

2) $p(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - p(M \cup E)$ avec
$p(M \cup E) = p(M) + p(E) - p(M \cap E)$
$= 0{,}0085$
D'où $p(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - 0{,}0085 = 0{,}9915$

3) la machine est déréglé c'est l'événement : $M \cup E$
Donc :

$$p(M \cap E \mid M \cup E) = \frac{p(M \cap E)}{p(M \cup E)} = \frac{0{,}0015}{0{,}0085} = 0{,}176$$

Par suite la probabilité que la machine à subit un dérèglement mécanique et électronique sachant qu'elle est déréglée est 0,176

Exercice 13

D_1 " la pièce présente le défaut D_1 "
D_2 " la pièce présente le défaut D_2 "
On a :

$$P(D_1) = \frac{6}{100}\ ,\ P(D_2) = \frac{12}{100}\ ,\ P(D_1 \cap D_2) = \frac{5}{100}$$

Soit A l'événement <<la pièce présente un seul défaut>>

$$p(A) = p(D_1 \cap \overline{D_2}) + p(\overline{D_1} \cap D_2)$$

Or on sait que : $p(\overline{D_1} \cap D_2) = p(D_2) - p(D_1 \cap D_2)$
$p(\overline{D_2} \cap D_1) = p(D_1) - p(D_1 \cap D_2)$

Par suite on aura :

$$p(A) = p(D_1) + p(D_2) - 2p(D_1 \cap D_2)$$
$$\frac{6}{100} + \frac{12}{100} - \frac{10}{100} = \frac{8}{100}$$

$$\boxed{p(A) = 8\%}$$

Exercice 14 !!

M désigne l'événement "personne choisi malade" et F l'événement " personne choisi est fumeur "

On a : $p(\overline{F} \cap \overline{M}) = \frac{1}{2}$ (50%)

$$p(\overline{F} \cap M) = \frac{1}{4}\ (25\%)$$

On sait que les événements sont indépendants donc :

$$p(\overline{F} \cap M) = p(\overline{F}).p(M)$$
$$\Leftrightarrow \quad p(M) = \frac{p(\overline{F} \cap M)}{p(\overline{F})}$$

Avec :

$$p(\overline{F}) = p(\overline{F} \cap \overline{M}) + p(\overline{F} \cap M)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Finalement $p(M) = \frac{p(\overline{F} \cap M)}{p(\overline{F})} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$

- $P_1 = p(F \cap \overline{M}) = p(\overline{M}).p(F)$
$= (1 - p(M))(1 - p(\overline{F}))$
$= \frac{2}{3} x \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{1}{6}}$

- $P_2 = p(F \cap M) = p(F).p(M)$
$= p(M).(1 - p(\overline{F})) = \frac{1}{3} x \frac{1}{4}$
$\Rightarrow \boxed{P_2 = \frac{1}{12}}$

Exercice 15 :

E_1 "appareil fabriquée la première entreprise "

E_2 "appareil fabriquée la deuxième entreprise "

F_1 " fiabilité de l'appareil de la première entreprise "

F_2 " fiabilité de l'appareil de la deuxième entreprise"

On désigne par F " fiabilité de l'appareil achetée " on a :

$$p(F) = p(F_1 \cap E_1) + p(F_2 \cap E_2)$$
$$= p(E_1).p(F_1|E_1) + p(E_2).p(F_2|E_2)$$
$$= \frac{2}{3} x \frac{95}{100} + \frac{1}{3} x \frac{90}{100} = \frac{14}{15} \square 93\ \%$$

$\boxed{p\ (F) = 93\ \%}$

Exercice 16 :

On applique le principe de probabilité totale

$p(D) = p(D \cap M_1) + p(D \cap M_2) + p(D \cap M_3)$

$= p(M_1)p(D \mid M_1) + p(M_2)p(D \mid M_2)$
$+ p(M_3)p(D \mid M_3)$

$$= \frac{50}{100} x \frac{1}{100} + \frac{35}{100} x \frac{2}{100} + \frac{15}{100} x \frac{6}{100} = \frac{21}{1000}$$

$\boxed{p(D) = 0{,}0021}$

Exercice 17 :

Appelons E l'événement :" l'emboutisseuse tombe en panne "
et R:" le robot tombe en panne "

On a : $p(E) = \frac{2}{100}$, $p(R) = \frac{8}{100}$ et $p(R \mid E) = \frac{1}{4}$

On a : $p(R \cap E) = p(E).p(R \mid E)$
$$= \frac{2}{100} x \frac{1}{4} = \frac{1}{200} = 0{,}5.10^{-2}$$

- $P((\overline{R} \cap \overline{E}) = 1 - p(R \cup E)$
$= 1 - [p(R) + p(E) - p(R \cap E)]$
$= 1 - p(R) - p(E) + p(R \cap E)$

$$= \frac{181}{200}$$

$\boxed{p(\overline{R} \cap \overline{E}) = 90{,}5\ \%}$